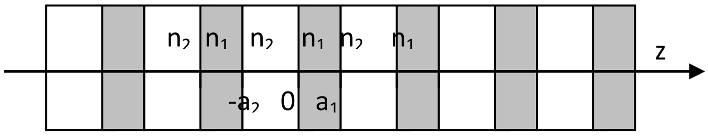
Solution analytique de la courbe de dispersion d'un cristal photonique 1D

S. Loualiche

Univ Rennes, INSA, CNRS, Institut FOTON - UMR 6082, F-35000 Rennes, France

Résumé : La solution de l'équation de propagation d'une onde plane dans un cristal périodique à une dimension est connue. Cependant, on ne trouve pas dans la littérature de solution analytique de la fonction de dispersion ω(k). Dans ce travail, dans certaines conditions d'accord de phase, on montre qu'il existe une forme analytique simple de ω(k). Cette solution ne dépend que d'un seul paramètre appelé G, qui est le rapport entre la moyenne géométrique et arithmétique des indices du milieu.

On étudie un cristal de période $a = a_1 + a_2$, composé de deux matériaux ayant deux indices optiques n_1 et n_2 représentés par la variable n(z) le long de l'axe de propagation z.



La propagation dans un cristal périodique le long de la direction z d'une onde représentée par son champ électrique E est décrite par la relation suivante : $E = E_0.e(z).e^{-i.\omega.t}$
Les solutions pour le champ électrique sont des fonctions sinusoïdales de la variable d'espace z.
L'application des relations de périodicité aux interfaces conduisent à l'équation aux valeurs propres dont la solution est la fonction de dispersion ω(k) pour le champ E.
Les constantes du problème sont : c la célérité de la lumière, ω la pulsation, k le vecteur d'onde.
On va utiliser des variables auxiliaires comme la phase **φ** afin d'aboutir à des relations lisibles.
La phase **φ et φ'** intègre les temps de traversée de a_1, a_2 : **φ(φ') = ω.τ (τ') avec $\tau = n_1 a_1/c$.**
On définit G comme le rapport entre la moyenne géométrique et arithmétique des indices :

$$G = \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}$$

Dans ce ce cas on a : $0 \le G \le 1$

On impose une relation de phase particulière aux matériaux du cristal : $n_2 a_2 = m.\ n_1 a_1$, avec m entier.

L'équation aux valeurs propres (φ(k)) devient alors uniquement dépendante de la constante G :

$$\cos[(m+1)\varphi] \quad - \quad (1-G^2).\cos[(m-1)\varphi] \quad = \quad G^2.\cos(ka)$$

Les solutions sont explicites pour les valeurs de m = 1, 2 et 3.

La relation de dispersion est particulièrement simple pour le cas m = 1 :

$\varphi(q) = \mathrm{Arcsin}[G.\sin(q\pi/2)]$ avec $k = q.\ \pi/a$ et q vecteur d'onde en unité réduite π/a

Les premières solutions sont : $\varphi_1(q) = \left[Arc\sin\left(G\sin(q\frac{\pi}{2}) \right) \right] \quad et \quad \varphi_2(q) = \left[\pi - Arc\sin\left(G\sin(q\frac{\pi}{2}) \right) \right]$

On voit apparaitre le gap photonique $\Delta\varphi = \pi - 2\mathrm{Arcsin}(G)$ en extrémité de zone de Brillouin (q=1).

Courbe de dispersion φ(q) montrant les 2 premières solutions et le gap photonique Δφ.